L'erreur de Hilbert

la naissance du trou noir

Introduction

À la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle, une partie de la communauté scientifique s'enorgueillissait d'avoir résolu les mystères de notre monde. Elle était persuadée qu'il n'y avait plus grand chose à découvrir... Seulement quelques problèmes mineurs qu'elle ne tarderait pas à résoudre ! Selon elle, la physique – ou la science en générale – venait d'atteindre ses limites, ou presque... C'était sans compter l'épineux problème du décalage du périhélie de Mercure que la mécanique celeste de Newton ne parvenait pas à modéliser. Dans ce décor, la théorie classique de la gravitation souffrait d'un manque de précision. Sa description de l'orbite de Mercure était imparfaite. La cause provenait de la grande intensité de l'attraction gravitationnelle du Soleil [1].

En effet, la gravitation, l'une des quatres forces fondamentales de la physique, était alors convenablement décrite par la mécanique newtonienne. Ainsi, nous pouvions prévoir le ballet des planètes et de leur(s) satellite(s) naturel(s) avec une très bonne précision. Enfin, presque, car seule Mercure, la planète la plus proche du soleil, échappait à la description précise du modèle newtonien, qui devenait dès lors incomplet. Il fallait donc compléter ce modèle, ou littéralement le remplacer, pour parvenir à corriger ce décalage du périhélie [2] de Mercure, tout en conservant son aptitude à prédire, avec exactitude, le reste des mouvements des corps célestes. C'est ce qu'entreprirent de faire deux scientifiques d'exception !

La bataille entre Einstein et Hilbert

Au début du $20^{\text{ème}}$ siècle, à l'Université de Göttingen en Allemagne, l'actualité scientifique tourne autour de deux chercheurs de renom : le physicien théoricien Albert Einstein et le mathématicien David Hilbert. Ce dernier ne vous dit peut être rien et pour cause, les médias américains ayant énormément contribué à faire d'Albert Einstein la "*movie star*" du monde de la physique théorique. Dailleurs, il s'est parfaitement accommodé de cette publicité, engendrant ainsi dans le grand public le sentiment d'une personnalité singulière, seule capable mener des calculs compliqués que personne ne pouvait comprendre... La réalité est toute autre. Après leur rencontre, David Hilbert, nouvellement imprégné par cette théorie de la gravitation qui restait à bâtir, changea totalement d'orientation pour s'y consacrer pleinement [3]. Muni d'un bagage mathématique conséquent, il va très rapidement rattraper Einstein en publiant, le 20 novembre 1915, une première communication dans les annales de l'Académie des Sciences de Prusse. C'est un long article intitulé "*Les fondements de la physique*", où il tente de formuler une équation de champ qui contienne à la fois la gravitation et l'électromagnétisme. Einstein, voyant la vitesse folle à laquelle avançait Hilbert, publia 5 jours plus tard seulement, dans les mêmes annales, le 25 novembre 1915, l'article évocateur intitulé "*L'équation de champ de la gravitation*". Il y expose l'équation fondamentale de la Relativité Générale :

$$R_{im} = -\chi\left(T_{im} - \frac{1}{2}g_{im}T\right) \tag{1}$$

Cette équation guide aujourd'hui encore, après plus d'un siècle, la cosmologie contemporaine.

Mais le 18 novembre, soit une semaine avant, Einstein avait publié une solution de l'équation de champ. Comment pouvait-il le faire, sans l'équation ? Il s'agissait en fait d'une solution approchée de l'équation de champ sans second membre :

$$R_{im} = 0 \tag{2}$$

Cette équation décrivait la gravitation dans le vide, à l'extérieur d'une étoile par exemple, elle lui permettait d'expliquer l'avancée du périhélie de Mercure.

David Hilbert ne tarda pas à féliciter son précieux rival, par le biais d'une lettre, tout en lui demandant comment il s'y était pris pour formuler si vite son équation de champ... Einstein ne donna pas suite à cette correspondance...

La solution de Schwarzschild extérieure

Parallèlement à cette confrontation scientifique, un autre mathématicien du nom de Karl Schwarzschild s'engage dans l'armée allemande sur le front russe où il prend alors connaissance dans un premier temps de la

1. rappelez loi de newton
2. def perihélie
3. expliquer le contexte historique de la concurence sur ce creneau de recherche

solution linéaire de l'équation de champ d'Albert Einstein sans second membre. Aussitôt, Karl Schwarzschild s'empresse de dresser une solution non linéaire plus sophistiquée de cette équation de champ qu'il publiera le 13 janvier 1916 sous le titre "*À propos du champ gravitationnel d'un point de masse selon la théorie d'Einstein*" toujours aux annales de l'académie des sciences de Prusse.

En imposant la symétrie sphérique et l'invariance par rapport au temps, il introduit 3 variables d'espace x, y et z ainsi qu'une variable de temps t avec lesquelles il construit une grandeur réelle positive $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et la solution non linéaire très élégante de l'équation de champ (équation 3) sans second membre capable de décrire la gravité à l'extérieur d'une étoile par exemple. Seulement, les coordonnées utilisées dans sa solution ne sont pas les mêmes que celles d'Einstein, qu'à cela ne tienne Karl Schwarzschild élabore une grandeur intermédiaire $R = \left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3}$ qu'il injecte dans sa solution pour trouver finalement ce qu'on appellera la métrique de Schwarzschild extérieure :

$$dS^2 = \left(1-\frac{\alpha}{R}\right)C^2dt^2 - \frac{dR^2}{1-\frac{\alpha}{R}} - R^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{3}$$

C'est précisément cette variable d'espace R que le mathématicien David Hilbert va confondre dans sa seconde publication avec une distance radiale travestissant ainsi la solution complète et originelle de Schwarzschild par la suivante :

$$dS^2 = \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)C^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{\alpha}{r}} - r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{4}$$

Solution que l'on trouve dans tous les livres de cosmologie et qui pose deux problèmes fondamentaux, il apparaît en effet deux singularités pour deux valeurs particulières de r : $r = \alpha$ et $r = 0$.

Si la première valeur correspond à une singularité de coordonnées [4], la seconde quant à elle, est une singularité vraie appelée singularité centrale et considérée par les cosmologistes comme inviolable qu'on ne peut éliminer. Les propriétés de cette singularité centrale alimenteront bien des articles comme ceux que publieront Stephen Hawking et Roger Penrose pour ne citer qu'eux. Mais alors comment une telle erreur d'appréciation a-t-elle pu être transmise à plusieurs générations de physiciens sans qu'aucun ou presque ne s'en rende compte ? La réponse est déconcertante. À cette époque la circulation de l'information scientifique était aux antipodes de celle d'aujourd'hui, la photocopieuse n'existait pas ! La communauté scientifique dans sa grande majorité n'a pas pris connaissance des articles originaux de Schwarzschild et pour cause elle ne lit pas l'allemand, le premier article du 13 janvier ne fut traduit en anglais qu'en 1975 et le second en 1999. Tout ceci a eu pour effet que les travaux d'Einstein et de Schwarzschild ne se sont diffusés dans le milieu scientifique que sous la forme de commentaires, et non sous leur forme originelle, permettant ainsi à l'interprétation erronée de Hilbert de perdurer encore aujourd'hui.

Il est intéressant de faire remarquer que des tentatives d'éclaircissement ont tout de même émergé mais n'ont pas eu l'effet escompté. On peut citer l'article du mathématicien Leonard S. Abrams publié en 1989 au journal canadien de physique sous le titre très révélateur "*trous noirs : l'héritage de l'erreur commise par Hilbert*", il est malheureusement décédé la même année, ou encore le physicien théoricien italien Salvatore Antoci qui a publié en 2003 et 2011 des articles reprenant une argumentation similaire à celle de Abrams. Ajouter à cela, la considérable et exceptionnelle contribution de Jean-Pierre Petit sur le sujet consultable sur son site personnelle à l'adresse suivante `https://www.jp-petit.org/science/f300/a301.htm`, articles qui n'eurent aucun impact sur la remise en question de l'existence des trous noirs au sein de la communauté scientifique.

Étudions à présent d'un peu plus près les conséquences de cette erreur en analysant la grandeur intermédiaire $R = \left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3} = \sqrt[3]{r^3+\alpha^3}$ initialement introduite par Schwarzschild :

- Si $r \gg \alpha$ alors $R \longrightarrow \sqrt[3]{r^3} = r$

Notons que α est le rayon de Schwarzschild [5] c'est-à-dire le rayon que doit avoir un astre pour qu'un objet à sa surface puisse s'échapper de son emprise gravitationnelle à la vitesse de la lumière. Et comme un objet massif ne peut pas atteindre une vitesse de libération égale à celle de la lumière, il sera piégé par le champ de gravitation de l'astre et ne pourra pas s'y dérober. Pour le cas du Soleil ce rayon vaut 3 km contre 1 cm pour la Terre. Autrement dit le rayon de Schwarzschild était négligeable par rapport aux dimensions de l'étoile et l'erreur de Hilbert n'avait donc pas d'incidence pour ces types d'astres. Karl Schwarzschild l'avait d'ailleurs explicitement mentionner dans son premier article du 13 janvier puisque selon lui, ce détail était secondaire dans la mesure où les connaissances de l'astronomie de son époque n'incluaient pas d'objet aussi massif qu'une étoile à neutrons, ces deux grandeurs sont pratiquement égales. Mais ce serait tout à fait différent avec une étoile à neutrons qui possède une densité incroyable [6]. Mais à cette époque l'existence des étoiles à neutrons était encore inconnue, leur existence n'ont été envisagée qu'à partir des années 30. Ce qui nous ramène au cas suivant :

4. Une singularité de coordonnées est une singularité que présente une métrique mais qui n'est qu'apparente, n'étant due qu'au choix d'un système de coordonnées inadapté.

5. Le rayon de Schwarzschild s'obtient en appliquant le principe de conservation de l'énergie mécanique, on obtient $\alpha = \frac{2GM}{C^2}$.

6. La densité moyenne d'une étoile à neutrons est ainsi d'un million de milliards de fois celle de l'eau. Un centimètre cube de sa matière aurait une masse de 1 milliard de tonnes.

- Si $r \ll \alpha$ alors $R \longrightarrow \sqrt[3]{\alpha^3} = \alpha$

La grandeur R possède alors une valeur minimale égale au rayon de Schwarzschild qui correspond alors à une singularité de coordonnées dans la métrique de Schwarzschild (Équation 3). Pour résumer, dans chacun des deux cas cités précédemment, aucune singularité centrale n'apparaît.

Reprenons le même problème mais cette fois-ci en exprimant r en fonction de R et α, ce qui nous donne $r = \sqrt[3]{R^3 - \alpha^3}$. Imposons à cette expression $R < \alpha$, cela implique que r est la racine cubique d'un nombre négatif soit une grandeur négative. Or l'article du 13 janvier de Schwarzschild définit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et dans ce cas, si on considère $r < 0$ alors les coordonnées d'espace x, y et z doivent être imaginaires. En conséquence, si $R < \alpha$, la métrique de Schwarzschild (Équation 3) décrit une courbure de l'espace-temps en dehors de l'hypersurface [7].

La solution de Schwarzschild intérieure

Plus tard, Karl Schwarzschild étudiera l'article d'Albert Einstein du 25 novembre dans lequel figure l'équation de champ gravitationnel complète avec second membre et formulera une solution non linéaire décrivant la courbure de l'espace-temps (la métrique) à l'intérieur d'une étoile :

$$dS^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{R_n^2}{\widehat{R}^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{R^2}{\widehat{R}^2}} \right)^2 C^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \dfrac{R^2}{\widehat{R}^2}} - R^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \tag{5}$$

Avec :

- R le marqueur de distance.
- R_n le rayon de l'étoile.
- $\widehat{R}$ une constante qui ne dépend que de la masse volumique de l'objet étudié [8].

Si $R \longrightarrow \widehat{R}$, le dénominateur de cette métrique intérieure serait nulle, de même si $R > \widehat{R}$ la quantité sous la racine et au dénominateur serait négative, et elle ne pourrait alors pas décrire la géométrie de l'espace-temps dans les deux situations.

Pour le soleil $\widehat{R} \simeq 1000 \times R_n$, en conséquence la métrique (équation 5) est réelle puisque l'argument de la racine carrée ne peut pas être dans ce cas négatif et imposer des valeurs imaginaires, de même le dénominateur ne peut pas s'annuler et donc conduire à une singularité centrale.

Comme nous venons de le voir, la criticité de la métrique intérieure (Équation 5) est atteinte pour $R = R_n = \widehat{R}$. Si on s'intéresse à une étoile à neutrons qui capte la masse d'une étoile voisine alors, en conservant une densité constante, celle-ci voit son rayon R_n augmenter tout en maintenant $\widehat{R}$ stable et augmenter R, autrement dit le rayon de Schwarzschild α tend à s'approcher plus rapidement de $\widehat{R}$ vu qu'il varie comme la masse et donc comme le cube du rayon de l'étoile [9]. La criticité atteinte, les cosmologistes l'interprètent comme la naissance d'un trou noir à partir de la métrique extérieure de Schwarzschild (Équation 4) erronée qui décrit pourtant la courbure de l'espace-temps dans une portion de l'espace vide !

Karl Schwarzschild publiera ses travaux le 16 février 1916 dans un article intitulé "*À propos du champ gravitationnel d'une sphère remplie d'un fluide incompressible selon la théorie d'Einstein*" avant de mourir le 19 juin de la même année à la suite d'une maladie contractée sur le front russe. Malgré sa contribution exceptionnelle, il laissera pour ses contemporains le sentiment d'un travail inachevé tant il aurait pu apporter davantage au monde de la cosmologie, et pour certains, comme celui qui aurait pu rectifier l'interprétation incorrecte de Hilbert.

Conclusion

La cosmologie est une science basée avant tout sur l'observation afin de valider ou d'infirmer les modèles proposés décrivant le comportement des astres célestes, à cet effet les mathématiques sont un outil précieux et indispensable permettant de construire ces différents modèles et en dégager une théorie. Aussi, une théorie, aussi séduisante soit-elle, ne doit jamais se déroger à l'observation. Or, on constate que les mathématiques sont aujourd'hui utilisés par les cosmologistes non pas pour s'adapter à l'actualité observationnelle mais pour consolider leur théorie vaille qui vaille parfois même si celle-ci est en contradiction avec l'observation. Qu'à cela ne tienne, si l'observation se déroge à la théorie, un autre outil vient à sa rescousse, c'est la simulation numérique.

---

7. Pour faire simple, une hypersurface est la généralisation en dimension supérieure, des courbes en dimension deux ou des surfaces en dimension trois.

8. $\widehat{R} = \sqrt{\dfrac{3C^2}{8\pi G\rho}}$ avec C la vitesse de la lumière, G la constante de gravitation et ρ la masse volumique de l'étoile considérée.

9. Il faut comprendre ici qu'une masse m est le produit d'un volume V et d'une masse volumique ρ soit $m = \rho\, V$. Donc α varie comme R_n^3 car $V = \dfrac{4}{3}\pi R_n^3$

Dans le numéro de juillet-août de la revue *Ciel et Espace* centré sur la nature de la force de gravité, le physicien théoricien Pierre Salati du laboratoire de physique théorique d'Annecy-Le-Vieux en Savoie expose un article dont le titre donne d'emblée le ton : "*Matière noire : il est temps de sortir de l'impasse*" et décrit même le malaise non avoué de certains de ses collègues à propos de l'échec des multiples tentatives de détection de ces particules supersymétriques comme le neutralino, particule hypothétique supposée responsable de l'excès de masse dans l'univers. En somme, le modèle de la matière noire a du plomb dans l'aile.

Et quant à notre bon vieux trou noir il n'est pas mieux loti. La preuve la plus répandue de son existence vient du fait de l'observation des vitesses rapides des étoiles autour du centre galactique. Or, une sphère remplie d'eau d'un rayon à peine supérieure à l'orbite terrestre, soit 10 minutes lumière, contiendrait l'équivalent de quatre millions de masses solaires suffisant pour engendrer le même effet. Il pourrait tout aussi bien s'agir d'un quasar comme l'a proposé Jean-Pierre Petit dans son livre "*on a perdu la moitié de l'univers* " publié en 1997 chez Albin Michel.

Mais ce n'est pas tout, en 1999 le satellite Chandra, équipé pour capter des rayons X, est pointé vers le centre galactique, résultat des courses, aucune détection tangible, rien. Et c'est précisément dans ce type de situation que la communauté scientifique s'obstine à rendre leur modèle plus farfelu plutôt que de revoir leur copie. La preuve en est avec l'argument avancé pour expliquer cet échec, "*il s'agirait d'un trou noir repu !*"

Miracle providentiel ou pas, en 2011 une masse de matière interstellaire est détectée et se dirige vers ce supposé trou noir géant situé au centre galactique. Les physiciens se mirent à réaliser des simulations numériques prédisant la déformation du gaz en étant aspirer littéralement par ce trou noir super-massif dés 2013. Mais encore une fois, l'observation s'est soldée par un nouvel échec et l'explication apportée a de quoi surprendre, quoi que : "*finalement on pense qu'il y a une étoile au sein du nuage de gaz qui maintient son intégrité*" (voir à ce sujet la conférence de Françoise Combes tenue le 7 octobre 2015 sous le thème "les trous noirs super-massifs trop gloutons" à cette adresse https://www.youtube.com/watch?v=t1TZCZKISSI à partir de 11min52 jusqu'à 14min25).

Plutôt que de publier une bibliographie qui alourdirait le texte, vous trouverez tout le matériel mentionné dans cet article sur le site de Jean-Pierre Petit à cette adresse : http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/.