Quelques principes du calcul des Quaternions

C'est une quantité complexe à 4 termes :

$$\vec{A} = \vec{S} + \vec{X}i + \vec{Y}j + \vec{Z}k = \vec{S} + \vec{V}$$

$\vec{S}$ = partie réelle $\vec{V}$ = partie symbolique ou vectorielle.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ → unité imaginaire (vectorielle)

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad \text{avec} \quad jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

$$ij = -ji = k$$

Tenseur ou module d'un Quaternion :

$$TA = \sqrt{S^2 + X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\text{Quaternion unité : } UA = \frac{S + Xi + Yj + Zk}{\sqrt{S^2 + X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

Multiplication des Quaternions:

$$A = S + Xi + Yj + Zk$$

$$A' = S' + X'i + Y'j + Z'k$$

$$\begin{aligned} 1) AA' = & ss' - xx' - yy' - zz' + [(sx+sx') + (yz'-zy')] i \\ & + [(sy'+ys') + (zx'-xz')] j \\ & + [(sz'+zs') + (xy'-yx')] k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) A'A = & ss' - xx' - yy' - zz' + i [(sx'+xs') - (yz'-zy')] \\ & + j [(sy'+ys') - (x'z - xz')] \\ & + k [(sz'+zs') - (xy' - yx')] \end{aligned}$$

La valeur du produit change avec l'ordre des facteurs....

Quaternions : produit de 2 vecteurs.

$$\vec{\alpha} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\vec{\alpha}' = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k} \quad \text{avec } \vec{S} \text{ et } \vec{S}' = 0$$

$$\alpha\alpha' = -(xx' + yy' + zz') + (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k$$

On a donc: $S(\alpha\alpha') = -(xx' + yy' + zz')$

$$V(\alpha\alpha') = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k$$

En changeant l'ordre des facteurs, on change le signe de V.

Relations importantes : $S(\alpha\alpha') = 1/2(\alpha\alpha' + \alpha'\alpha)$

$$V(\alpha\alpha') = 1/2(\alpha\alpha' - \alpha'\alpha)$$

Inverse d'un quaternion : diviser le conjugué par le carré de son module

$$A.KA = KA.A = (TA)^2$$

où écrire :

$$A.KA = KA.A = 1 \quad \text{d'où } A = \frac{KA}{(TA)^2}$$

Produit de 2 vecteurs :

$$\alpha = Xi + Yj + Zk$$

$$\alpha' = X'i + Y'j + Z'k$$

$$S(\alpha\alpha') = -rr'(aa' + bb' + cc') \quad r, r' = \text{modules}$$

$$= -rr' \cdot \cos \theta \quad a, b, c \text{ --- } a', b', c': \text{cosinus directeurs}$$

$$V(\alpha\alpha') = rr'[(bc' - cb')i + (ca' - ac')j + (ab' - ba')k]$$

$$V(\alpha'\alpha) = -rr' \cdot \sin \theta (Li + Mj + Nk)$$

L, M, N, cosinus directeurs de l'axe des vecteurs $\alpha\alpha'$

Quaternions, suite.....

En posant : $\lambda = (Li+Mj+Nk)$

λ représente l'axe des vecteurs (α, α')

$$\alpha\alpha' = -r^2(\cos\theta + \lambda\sin\theta)$$

$$\alpha' = \alpha(\cos\theta + \lambda\sin\theta)$$

Représentation d'un quaternion :

$$A = S + Xi + Yj + Zk$$

ou, avec (l, m, n)

$$A = S + r(Li+Mj+Nk)$$

en posant $S = \rho\cos\theta$, $r = \rho\sin\theta$, $\lambda = Li+Mj+Nk$

il vient : $A = \rho(\cos\theta + \lambda\sin\theta)$

$$\text{avec : } \rho^2 = s^2 + r^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$\theta =$ argument du quaternion

$\lambda =$ vecteur unité

Analogie des quaternions et des imaginaires :

$$A = \rho(\cos\theta + \lambda\sin\theta) \quad A' = \rho'(\cos\theta' + \lambda\sin\theta')$$

$$AA' = \rho\rho' [\cos(\theta+\theta') + \lambda\sin(\theta+\theta')]$$

$$\text{où } A = \rho [\cos(n\theta) + \lambda\sin(n\theta)]$$

C'est la généralisation de la formule de Moivre, elle permet de définir une fonction $F(z)$ de la variable z lorsque celle-ci est un quaternion.....